

УДК 539.3

Л. В. КУРПА, д-р техн. наук,
Т. В. ШМАТКО, канд. техн. наук

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА

С использованием теории R-функций и вариационного метода Ритца предложен подход к решению задач о свободных колебаниях функционально-градиентных (ФГ) пологих оболочек с различной формой плана. Алгоритм разработан для уточненной теории ФГ пологих оболочек типа теории С.П.Тимошенко. С помощью разработанного программного обеспечения решены тестовые задачи для ФГ пологих оболочек с квадратным и эллиптическим планом. Для иллюстрации эффективности и универсальности предложенного подхода рассмотрены оболочки различной кривизны, опирающиеся на план сложной формы.

Ключевые слова: функционально градиентные материалы, пологие оболочки, теория R-функций, RFM, метод Ритца, сложная форма, теория Тимошенко.

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) представляют собой современные неоднородные композитные материалы, которые обычно получают в результате сплава металла и керамики. Механические свойства ФГМ, в частности модули упругости, плотности, коэффициент Пуассона, непрерывно изменяются вдоль одной или нескольких координат, т.е. являются функциями этих координат. Плавное изменение свойств материала от одной поверхности оболочки к другой позволяет существенно сократить уровни концентрации напряжений при действии различных факторов, например, при воздействии температуры. Благодаря высокой прочности, легкости и высокой термостойкости ФГМ находят самое широкое применение во многих инженерных приложениях и, прежде всего, в авиационной и ракетной промышленности. Теория пластин и оболочек, изготовленных из ФГМ, интенсивно развивается. Об этом свидетельствует большое число появившихся в последние годы работ [4–8] и др. Как следует из обзора литературы, детально изучаются вопросы линейного и нелинейного динамического и статического анализа функционально-градиентных пластин и оболочек. При этом наиболее существенный прогресс, достигнут для объектов, моделируемых пластинами и оболочками, в основном прямоугольной или круглой формы, свободно опертых или жестко заземленных по всему контуру.

В данной работе для исследования собственных колебаний ФГ пластин и пологих оболочек различной формы в плане предложено использовать метод R-функций (RFM). Метод разработан для решения указанных задач в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей сдвиговые деформации.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим в ортогональной системе координат пологую оболочку постоянной толщины h , с радиуса-

ми главных кривизн срединной поверхности R_x, R_y . Предположим, что оболочка изготовлена из смеси керамики и металла. Механические свойства композита непрерывно изменяются вдоль толщины оболочки таким образом, что верхняя часть панели ($z = h/2$) является керамической, а нижняя ($z = -h/2$) – металлической. Материальные свойства ФГ структур, которые зависят от объемных частей составляющих материалов, будем определять, используя простейший степенной закон. Согласно этому закону [4-8], механические свойства смеси из двух составляющих определяются следующим образом:

$$P(z) = (P_c - P_m)V + P_m, \quad (1)$$

где V выражает объемную долю керамики и определяется как:

$$V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k. \quad (2)$$

Выражение (1) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости, коэффициента Пуассона и плотности композита, P_c, P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Показатель степени k объемной доли керамики в формуле (2) может изменяться от нуля до бесконечности, т.е. $0 \leq k < \infty$. При этом если $k = 0$, то структура является полностью керамической, если же $k = \infty$, то металлической. Используя уточненную теорию первого порядка типа С.П.Тимошенко [1], запишем соотношения для деформаций, усилий и моментов:

$$\varepsilon_{11} = u_{,x} + w / R_x, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y} + w / R_y, \quad \varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x},$$

$$\chi_{11} = \psi_{x,x}, \quad \chi_{22} = \psi_{y,y}, \quad \chi_{12} = \psi_{x,y} + \psi_{y,x},$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности в направлениях осей Ox, Oy, Oz соответственно, ψ_x, ψ_y – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей Oy и Ox . Усилия и моменты N_{ij}, M_{ij} ($i, j = 1, 2$), которые вычисляются в результате интегрирования вдоль оси Oz , имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1 - \nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_1(1 - \nu)}{2} \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2(1 - \nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_3(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix},$$

где

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k + 1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k + 1)(k + 2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k + 3} - \frac{1}{k + 2} + \frac{1}{4(k + 4)} \right) \right) h^3.$$

Перерезывающие силы Q_x , Q_y определяются как:

$$Q_x = K_s^2 \frac{E_1 h}{2(1 + \nu)} (w_{,x} + \psi_x), \quad Q_y = K_s^2 \frac{E_1 h}{2(1 + \nu)} (w_{,y} + \psi_y),$$

где K_s^2 – корректирующий коэффициент сдвига, который ниже принимается равным $\frac{5}{6}$.

Свободные колебания полой оболочки в рамках уточненной теории первого порядка описываются пятью дифференциальными уравнениями движения [7, 8]:

$$N_{11,x} + N_{12,y} = m_1 u_{tt}, \quad N_{12,x} + N_{22,y} = m_1 v_{tt},$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + k_1 N_{11} + k_2 w_{,yy} = m_1 w_{tt};$$

$$M_{11,x} + M_{12,y} - Q_x = m_2 \psi_{x,tt}, \quad M_{12,x} + M_{22,y} - Q_y = m_2 \psi_{y,tt},$$

где

$$m_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz, \quad m_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz.$$

Плотность композита ρ также определяется в результате интегрирования по толщине оболочки:

$$\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k + 1} \right) h.$$

Разрешающие уравнения дополняются граничными условиями, характер которых определяется способом закрепления контура оболочки.

Метод решения. Аналогично, как и в случае однослойных анизотропных пластин и оболочек, применение RFM требует знания вариационной постановки задачи о колебаниях оболочек и пластин. Если рассматриваются гармонические свободные колебания, то вектор неизвестных функций представляется в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{u}(x, y, t), \bar{v}(x, y, t), \bar{w}(x, y, t), \bar{\psi}_x(x, y, t), \bar{\psi}_y(x, y, t)) = \\ = \bar{U}(u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)) \sin \lambda t, \end{aligned}$$

где λ – частота колебаний. Используя принцип Остроградского-

Гамильтона, можно получить вариационное уравнение в виде:

$$\partial I = 0, \quad (3)$$

где

$$I = U - \lambda T. \quad (4)$$

Выражения для потенциальной U и кинетической энергии T определяются с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12}) d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x(w_{,x} + \psi_x) + Q_y(w_{,y} + \psi_y)) d\Omega, \\ T = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{h^2}{12} (\psi_x^2 + \psi_y^2) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Минимизацию функционала (4) будем выполнять с помощью метода Ритца, согласно которому неизвестные функции u , v , w , ψ_x , ψ_y представляются как

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{N_2} b_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{N_5} e_i w_i, \\ \psi_x = \sum_{i=1}^{N_3} c_i \psi_{xi}, \quad \psi_y = \sum_{i=1}^{N_4} d_i \psi_{yi}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, $\{\psi_{xi}\}$, $\{\psi_{yi}\}$, $\{w_i\}$ – последовательности координатных функций, удовлетворяющие, по крайней мере, главным граничным условиям; a_i , b_i , c_i , d_i , e_i – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия минимума функционала (4). Базой для построения таких последовательностей являются структуры решения краевой задачи [2, 3]. Например, для условий жесткой заделки такие структурные формулы имеют следующий вид:

$$u = \omega P_1 e_i, \quad v = \omega P_2, \quad w = \omega P_3, \quad \psi_x = \omega P_4, \quad \psi_y = \omega P_5, \quad (6)$$

где P_i ($i=1, 5$) – неопределенные компоненты структуры решения [3]. Функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega(x, y) &> 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

Представим неопределенные компоненты структуры решения в виде разложения по какой-либо полной системе функций $\{\Phi_i\}$:

$$P_r = \sum_{i=1}^{n_r} a_i^{(r)} \Phi_i^{(r)} \quad (r = \overline{1, 5}). \quad (7)$$

Тогда последовательности координатных функций определяются как:

$$\begin{aligned} u_i &= \omega \Phi_i^{(u)}, \quad v_i = \omega \Phi_i^{(v)}, \\ w_i &= \omega \Phi_i^{(w)}, \quad \psi_{xi} = \omega \Phi_i^{(\psi_x)}, \quad \psi_{yi} = \omega \Phi_i^{(\psi_y)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Численные результаты. Для проверки достоверности предложенного подхода и созданного программного обеспечения рассмотрим некоторые тестовые задачи и сравним полученные результаты с известными. Решение будем выполнять в рамках классической и уточненной теорий первого порядка. При этом для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах будем использовать обычные степенные полиномы. В качестве ФГМ выберем комбинацию Al / Al_2O_3 . Механические характеристики для материалов, составляющих такой сплав, представляются следующими параметрами [5, 7]:

$$Al : \quad E_m = 70 GPa, \quad \nu_m = 0.3, \quad \rho_m = 2707 kg / m^3; \quad (9)$$

$$Al_2O_3 : \quad E_c = 380 GPa, \quad \nu_c = 0.3, \quad \rho_c = 3800 kg / m^3. \quad (10)$$

Задача 1. Исследуем собственные колебания пластины и полой оболочки (сферической, цилиндрической или в форме гиперболического параболоида), опирающейся на квадратный план со стороной a . Соотношение характерного геометрического размера к толщине принято равным $a/h = 10$. Предположим,

что оболочка свободно оперта по всему контуру. В табл. 1 представлено сравнение основных частот, вычисленных при использовании RFM на базе классической (CST) и уточненной теорий Тимошенко (FSDT), с результатами работ [4, 5, 7]. Результаты для основной частоты представлены в виде безразмерного параметра $\Omega_1 = \lambda_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$. Для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах (6) были выбраны степенные полиномы. При этом макси-

Таблица 1

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	k	RFM (CST)	RFM (FSDT)	(CST) [4]	(FSDT) [5]	(HSDT) [7]
0	0	0	0,0597	0,0576	0,0597	0,0577	0,0578
		0,5	0,0505	0,0489	0,0506	0,0490	0,0492
		1	0,0455	0,0441	0,0456	0,0442	0,0443
		4	0,0395	0,0382	0,0396	0,0383	0,0381
		10	0,0380	0,0365	0,0380	0,0366	0,0364
0.5	0,5	0	0,0770	0,0753	0,0779	0,0762	0,0751
		0,5	0,0665	0,0652	0,0676	0,0664	0,0657
		1	0,0605	0,0593	0,0617	0,0607	0,0601
		4	0,0508	0,0496	0,0519	0,0509	0,0503
		10	0,0472	0,0462	0,0482	0,0471	0,0464
0	0,5	0	0,0642	0,0622	0,0648	0,0629	0,0622
		0,5	0,0546	0,0531	0,0553	0,0540	0,0535
		1	0,0494	0,0481	0,0501	0,0490	0,0485
		4	0,0423	0,0411	0,0430	0,0419	0,0413
		10	0,0403	0,0389	0,0408	0,0395	0,0390
0.5	-0,5	0	0,0582	0,0562	0,0597	0,0580	0,0563
		0,5	0,0493	0,0477	0,0506	0,0493	0,0479
		1	0,0444	0,0430	0,0456	0,0445	0,0432
		4	0,0385	0,0372	0,0396	0,0385	0,0372
		10	0,0370	0,0356	0,0380	0,0368	0,0355

мальные степени полиномов (n_r , $r = \overline{1, 5}$) в разложениях (7) для функций u , v , w , ψ_x , ψ_y выбирались равными соответственно 9, 9, 10, 9, 9. Анализ сравнения показывает, что результаты, полученные с помощью уточненной теории первого порядка (RFM, FSDT), практически совпадают с представленными в работе [5]. Отклонения от результатов теории более высокого порядка (HSDT) [7] не превышают 4 %. Отклонения результатов при использовании классической теории (RFM, CST) с результатами работы [4] не превосходят 2%. В целом следует отметить, что классическая теория приводит в большинстве случаев к завышенным значениям основных частот по сравнению с уточненными теориями.

Задача 2. Тестирование разработанного программного обеспечения было выполнено также для жестко защемленной сферической оболочки с эллиптической формой плана. Геометрические параметры исследуемой оболочки выбраны следующими:

$$R_x / R_y = 1, \quad a / b = 2, \quad h / 2a = 0.1, \quad 2a / R_x = 0.2,$$

где a и b – полуоси эллипса. Механические характеристики рассматриваемых сплавов такие же, как и в работе [5]:

FG1:

$$Al / Al_2O_3 : E_m / E_c = 70 / 380 GPa,$$

$$\nu_m = \nu_c = 0.3, \quad \rho_m / \rho_c = 2707 / 3800 \text{ kg} / m^3;$$

FG2:

$$Al / ZrO_2 : E_m / E_c = 70 / 151 GPa,$$

$$\nu_m = \nu_c = 0.3, \quad \rho_m / \rho_c = 2707 / 3000 \text{ kg} / m^3.$$

На рис. 1 представлена зависимость основного безразмерного частотного параметра $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ от показателей степени k

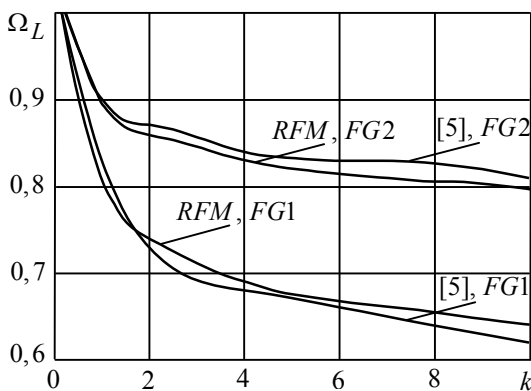


Рис. 1

объемной доли керамики.

Проведенное тестирование предложенного метода и разработанного программного обеспечения позволяет рассматривать пластины и оболочки со сложной формой плана и различными видами граничных условий. Ниже представлена одна из таких задач.

Задача 3. Исследуем свободные колебания функционально-градиентной жестко защемленной по всему контуру оболочки, опирающейся на план, изображенный на рис. 2.

Предположим, что геометрические параметры оболочки выбраны следующими:

$$\begin{aligned} R_x / R_y &= 1, \quad b / 2a = 0.5, \\ h / 2a &= 0.1, \quad 2a / R_x = 0.2, \\ b_1 / 2a &= 0.35, \quad a_1 / 2a = 0.2. \end{aligned}$$

Механические характеристики сплавов выберем такими же, как и в задаче 2.

Для конкретизации структуры решения (6) необходимо описать в аналитическом виде уравнение границы области $\omega = 0$. Используя R-операции \wedge_0, \vee_0 [3], построим это уравнение в виде:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 f_3,$$

где $f_1 = \left((a_1^2 - x^2) / 2a_1 \right) \geq 0$ – вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = \pm a_1$; $f_2 = \left((b_1^2 - y^2) / 2b_1 \right) \geq 0$ – горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = \pm b_1$; $f_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \geq 0$ – часть плоскости, находящаяся внутри эллипса.

При численной реализации разработанного программного обеспечения была учтена симметрия поставленной задачи относительно осей Ox и Oy . Поэтому интегрирование выполнялось по 1/4 области и последовательности полиномов были выбраны в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(u)}, \Phi_i^{(\psi_x)} &: x, x^3, xy^2, x^5, x^3y^2, xy^4, x^7, x^5y^2, x^3y^4, xy^6, \dots; \\ \Phi_i^{(v)}, \Phi_i^{(\psi_y)} &: y, x^2y, y^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6y, x^4y^3, x^2y^5, y^7, \dots; \\ \Phi_i^{(w)} &: 1, x^2, y^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^6, x^4y^2, x^2y^4, y^6, \dots \end{aligned}$$

Для исследования сходимости значений собственных частот был проведен вычислительный эксперимент при использовании различного количества координатных функций. Было установлено, что третий знак после запятой стабилизируется при сохранении степеней аппроксимирующих полиномов (11, 11, 14, 11, 11), что соответствует следующему количеству координатных функций для u, v, w, ψ_x, ψ_y : (21, 21, 36, 21, 21).

На рис. 3 представлены зависимости собственных частот от значений k -степени показателя закона распределения составляющих материалов. Для проверки достоверности полученных результатов был выполнен расчет при значении параметра $b_1 / 2a = 0,51$. В этом случае форма, представленная на рис. 2, очень близка к эллиптической. Пунктирные кривые соответствуют этому значению параметра b_1 . Как видно из рис. 3, значения собственных частот для этого значения параметра и соответствующие значения частот для эллиптической формы практически совпадают. Такая проверка позволяет сделать вывод о правильности работы программ-

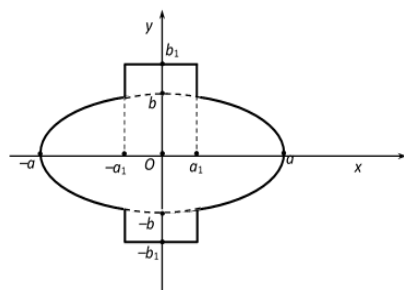


Рис.2

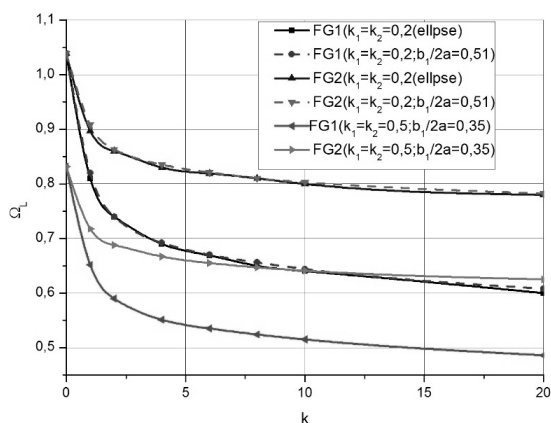


Рис.3

В табл. 2 приведены значения основного частотного параметра $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ для жестко защемленных оболочек двоякой кривизны (рис. 2) для различных значений показателя степени объемной доли керамики k . Расчет выполнен для сферических панелей, цилиндрических, в виде гиперболического параболоида, а также для пластин.

Из табл. 2 следует, что при росте величины k , вне зависимости от типа кривизны оболочки и механических характеристик смесей наблюдается

уменьшение значений основной частоты колебаний. Частоты «асимптотически» приближаются к соответствующим значениям частот металлической оболочки или пластины.

Следует заметить, что во всем диапазоне изменения значений величины $k \in [0, 10]$ наибольшие величины основных частот имеют сферические обо-

лочки, а наименьшие пластины.

В заключение отметим, что программное обеспечение, созданное на базе системы POLE-RL, протестировано на примерах функционально-градиентных пологих оболочек с прямоугольным и эллиптическим планом. Достаточно хорошее совпадение результатов для тестовых задач позволило использовать разработанный подход для оболочек, опирающихся на план сложной формы.

РЕЗЮМЕ. З використанням теорії R-функцій та варіаційного методу Рунца запропоновано підхід для розв'язку задач про вільні коливання функціонально градієнтних (ФГ) пологих оболонок з довільною формою плану. Алгоритм розроблено для уточненої теорії ФГ пологих оболонок типу теорії С.П.Тимошенко. За допомогою розробленого програмного забезпечення розв'язано тестові задачі для ФГ пологих оболонок з квадратним

та еліптичним планом. Для підтвердження ефективності та універсальності запропонованого підходу досліджено оболонки різної кривизни, які мають складну форму плану.

Ключові слова: функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), пологі оболонки, теорія R-функцій, RFM, метод Ритца, складна форма, теорія Тимошенко.

SUMMARY. *The approach for solving problems about free vibrations of shallow shells with complex plan-form consisting of functionally graded materials is developed. The solution method is based on the joint usage of refined shallow shell theory of the first order (Timoshenko's type), Ritz variational method and R-function theory. Test problems have been solved for FG shallow shells with square and elliptical plan form. In order to confirm the advantage of the proposed approach the double-curved shallow shells with complex plan form are investigated.*

Key words: *functionally-graded materials (FGM), shallow shells, R-functions theory, (RFM), method by Ritz, complex plan form, Timoshenko's type theory.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Об учете неоднородности деформаций поперечного сдвига по толщине в слоистых оболочках.//Прикладная механика.– 1977.– 13, № 10.– С. 36–42
2. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек.– Харьков, 2009.– 408 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения.– К.: Наук. думка, 1982.– 551 с.
4. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells// J. of Sound and Vibration.– 2011.– 330.– P. 1432–1454.
5. Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures.– 2010.– 92.– P. 2573–2581.
6. Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells// Int J. Mech Sci.– 1999.– 41.– P. 309–324.
7. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory// Composite Structures.– 2008.– Vol. 84.– P. 132–46.
8. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates//International Journal for numerical methods in engineering.– 2000.– Vol. 47.– P. 663–684

Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков

Поступила 11.04.2014